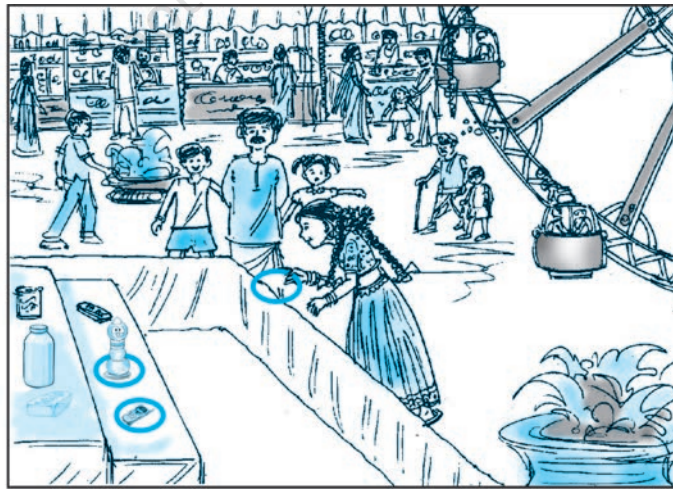
5013CH03

3 دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑے (PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

3.1 تعارف

آپ کا سابقہ ذیل میں دی گئی صورت حال سے ضرور ہوا ہوگا:

عقیلہ اپنے گاؤں میں ایک میلے میں گئی۔ وہ جھولے (Giant Wheel) پر جھولنا چاہتی تھی اور ہو پلا (Hoopla) کھیلنا چاہتی تھی۔ ہو پلا (ایک ایسا کھیل ہے جس میں آپ ایک اسٹال میں رکھی ہوئی چیزوں پر ایک رِنگ (Ring) پھینکتے ہیں۔ اگر آپ کا رِنگ کسی بھی چیز کو پوری طرح گھیر لیتا ہے، وہ چیز آپ کی ہو جاتی ہے)۔ جتنی مرتبہ اس نے ہو پلا کھیلا اس کے آدھی مرتبہ جھولے میں سواری کی۔ اگر جھولہ کا ہر ایک چکر اس کو 3 روپے میں پڑا اور ہو پلا کا ہر ایک کھیل 4 روپے میں تو آپ کیسے معلوم کریں گے کہ اس نے جھولے کے کتنے چکر لگائے اور کتنی مرتبہ ہو پلا کھیلا اگر اس نے کل 20 روپے خرچ کیے تو آپ بہت سی حالتوں پر غور

کر سکتے ہیں۔ جب کہ اس نے ایک چکر جھوُلا جھوُلا ہو، کیا یہ ممکن ہے؟ کیا یہ ممکن ہے کہ اس نے دو چکر جھوُ لا جھوُ لا ہو؟ اور اسی طرح آگے بھی۔ یا آپ اپنی نویں کلاس کی قابلیت سے اس صورت حال کو دومتغیر والی خطی مساواتوں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ آیئے اس طریقے پر غور کرتے ہیں

عقیلہ کے ذریعے لگائے گئے جھولے کے چکروں کی تعداد کو x سے ظاہر کرتے ہیں اور جتنی مرتبہ اس نے ہو پلا کھیلا اسے y سے ظاہر کرتے ہیں، اب مذکورہ بالا صورت حال کو دو مساواتوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

کیا ہم مساواتوں کے اس جوڑے کا حل معلوم کر سکتے ہیں؟ اس کو معلوم کرنے کے بہت سے طریقے ہیں جو ہم اس باب میں پڑھیں گے۔

3.2 دومتغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑے

نویں کلاس میں کی گئیں مندرجہ ذیل دومتغیر والی خطی مساواتوں کی مثالوں پر غور کیجئے۔

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

اور $x - 0y = 2$ یعنی $x = 2$

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ایک مساوات جس کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھا جا سکے جہاں b, a اور c حقیقی اعداد ہیں اور a اور b دونوں صفر نہیں ہیں، دومتغیر x اور y کی خطی مساوات کہلاتی ہے۔ (ہم اکثر شرط a اور b دونوں صفر نہ ہو کر $a^2 + b^2 \neq 0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔) آپ یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ ایسی مساوات کا حل قدروں کا ایک جوڑا ہوتا ہے ایک x کے لئے اور دوسرا y کے لئے جو مساوات کی دونوں جانب کو برابر بنا دیتا ہے۔

مثال کے طور پر، آیئے مساوات $2x + 3y = 5$ کی LHS میں $x = 1$ اور $y = 5$ رکھیے۔ تب

$$\text{LHS} = 2(1) = 2 + 3(1) = 2 + 3 = 5$$

جو RHS کے برابر ہے۔ اس لئے $x = 1$ اور $y = 1$ مساوات $2x + 3y = 5$ کا حل ہے

آیئے اب مساوات $2x + 3y = 5$ میں $x = 1$ اور $y = 7$ رکھیے

LHS=2(1)+3(7)=2+21=23

جو RHS کے برابر نہیں ہے۔

اس لئے $x=1$ اور $y=7$ مساوات کا حل نہیں ہے۔

جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب کیا ہے؟ اس کا مطلب ہے کہ نقطہ (1,1) مساوات $2x + 3y = 5$ پر ظاہر کرنے والے خط پر واقع ہے اور نقطہ (1,7) اس پر واقع نہیں ہے۔ اس لئے **مساوات کا ہر ایک حل اس کو ظاہر کرنے والے خط پر واقع ایک نقطہ ہے۔**

درحقیقت یہ کسی بھی خطی مساوات کے لئے درست ہے۔ یعنی **دو متغیر والی خطی مساوات** $ax + by + c = 0$ کا ہر **ایک حل** (x,y) **اس مساوات کو ظاہر کرنے والے خط کا ایک نقطہ ہے** اور یونہی اس کے برعکس بھی اب اوپر دی گئی (1) اور (2) مساواتوں پر غور کیجئے۔ یہ مساواتیں ایک ساتھ لینے پر میلے میں عقیلہ نے جو کیا اس کو ظاہر کرتی ہیں۔ یہ دو خطی مساواتیں متغیر x اور y میں ہیں۔ ایسی مساواتیں دو متغیر والی خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتی ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ ایسے جوڑے الجبری طور پر کیسے نظر آتے ہیں۔

دو متغیروں x اور y میں خطی مساواتوں کے جوڑوں کی عمومی شکل ہے۔

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

اور

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

جہاں $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ تمام حقیقی اعداد ہیں اور $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں کی کچھ مثالیں ہیں۔

$2x + 3y - 7 = 0$ اور $x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ اور $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ اور $17 = y$

کیا آپ جانتے ہیں کہ یہ جیومیٹری کے طور پر کیسی نظر آتی ہے؟

یاد کیجئے کہ آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ دو متغیر والی خطی مساواتوں کا جیومیٹریائی (یعنی گراف) اظہار ایک خطِ مستقیم ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑے جیومیٹریائی طور پر کیسے نظر آئیں گے؟ یہ دو خط مستقیم ہوں گے ان پر ایک ساتھ غور کیا جائے گا۔

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ مستوی میں دیے ہوئے دو خطوط کے ساتھ مندرجہ ذیل تین باتوں میں سے صرف

ایک بات صحیح ہوگی۔

(i) دونوں خطوط ایک ہی نقطہ پر قطع نہیں کریں گے۔

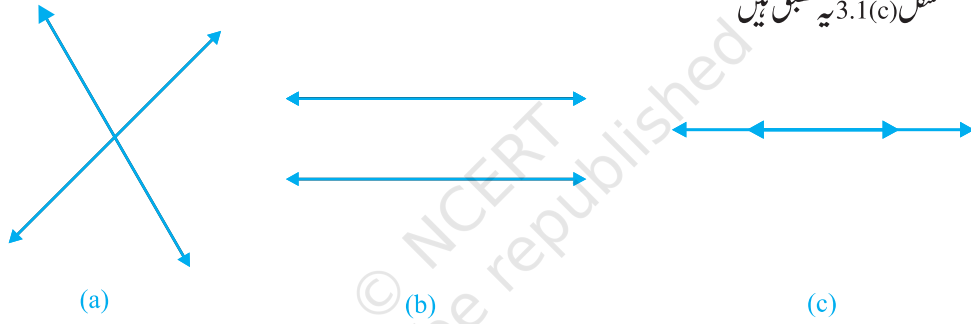
(ii) دونوں خطوط قطع نہیں کریں گے یعنی متوازی ہوں گے۔

(iii) دونوں خطوط منطبق ہوں گے۔

یہ تمام ممکنہ باتیں ہم شکل 3.1 میں دکھاتے ہیں۔

شکل (a)3.1 یہ قطع کرتے ہیں

شکل (b)3.1 میں یہ متوازی ہیں اور

شکل (c)3.1 یہ منطبق ہیں

شکل 3.1

ہم خطی مساواتوں کے جوڑوں کو ظاہر کرنے کے دونوں طریقوں جیومیٹریائی اور الجبری کو ایک ساتھ لیتے ہیں۔ آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: آیئے سیکشن 3.1 میں دی گئی عقیلہ کی مثال لیتے ہیں۔ جس میں عقیلہ ایک میلے میں جاتی ہے اور 20 روپے خرچ کرتی ہے جھولہ جھولنے اور ہو پلا کا کھیل کھیلنے میں، اس صورت حال کو الجبری اور جیومیٹریائی طور پر ظاہر کیجئے۔

حل: مساواتوں کا جوڑا اپنے گا وہ ہے:

$$y = \frac{1}{2}x$$

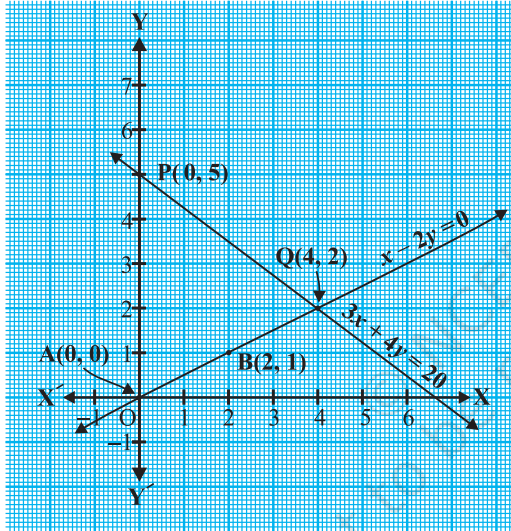
یعنی $$x - 2y = 0 \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

جدول 3.1

x	0	2
$y=\frac{x}{2}$	0	1

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y=\frac{20-3x}{4}$	5	0	2

آیئے ان مساواتوں کو گراف سے ظاہر کرتے ہیں۔اس کے لئے ہمیں مساوات کے کم سے کم دوحل درکار ہیں۔ہم یہ حل جدول 3.1 میں دکھاتے ہیں۔

یاد کریں نویں کلاس میں آپ نے سیکھا ہے کہ ہر خطی مساوات کے لامحدود حل ہوتے ہیں تو ہر ایک مساوات کے لئے آپ مختلف دو قدریں چنئے کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ آپ نے $x=0$ ، پہلی اور دوسری مساوات کے لئے کیوں چنا ؟ جب متغیروں میں سے ایک صفر ہو جاتا ہے تو خطی مساوات ،ایک متغیر والی مساوات بن جاتی ہے۔جس کو ہم آسانی سے حل کر سکتے ہیں مثال کے طور پر (2) مساوات میں $x=0$ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے $4y=20$ یعنی $y=5$ اسی طریقہ سے مساوات (2) میں $y=0$ رکھنے پر ہمیں ملتا

شکل 3.2

ہے $3x=20$ یعنی $x=\frac{20}{3}$ لیکن کیونکہ $\frac{20}{3}$ صحیح عدد نہیں ہے اس لئے اس کو صحیح طریقہ سے گراف پر پلاٹ نہیں کیا جا سکتا اس لئے ہم $y=2$ لیتے ہیں جس سے $x=4$ ملتا ہے جو ایک صحیح عدد ہے

نقاط A(0,0), B(2,1) اور P(0,5), Q(4,2) جو جدول 3.1 مساواتوں کے نظیری حل ہیں، کو پلاٹ کیجئے اب مساواتوں $x-2y=0$ اور $3x+4y=20$ کو ظاہر کرنے والے خطوط AB اور PQ کھینچئے۔جیسا کہ شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 3.2 میں مشاہدہ کیجئے کہ دو مساواتوں کو ظاہر کرنے والے خطوط نقطہ (4,2) پر ایک دوسرے کو قطع کر رہے ہیں۔اس کا مطلب کیا ہے اس کا مطالعہ ہم اگلے سیکشن میں کریں گے۔

مثال 2: رومیلا ایک اسٹیشنری کی دکان پر گئی اور اس نے 9 روپیہ میں 2 پنسل اور 3 ربڑ خریدیں اس کی دوست سونالی نے جب

رومیلا کے پاس نئے قسم کی پنسل اور ربڑ دیکھی تو اس نے بھی اسی قسم کی 4 پنسل اور 6 ربڑ 18 روپے میں خریدیں۔اس صورت حال کو الجبری اور جیومیٹریائی (گراف کے) طور پر ظاہر کیجیے۔

حل: مان لیجئے ایک پنسل کی قیمت x روپے اور ایک ربڑ کی قیمت y روپے ہے تب اس سوال کو الجبری اظہار مندرجہ ذیل مساواتوں سے ہوگا۔

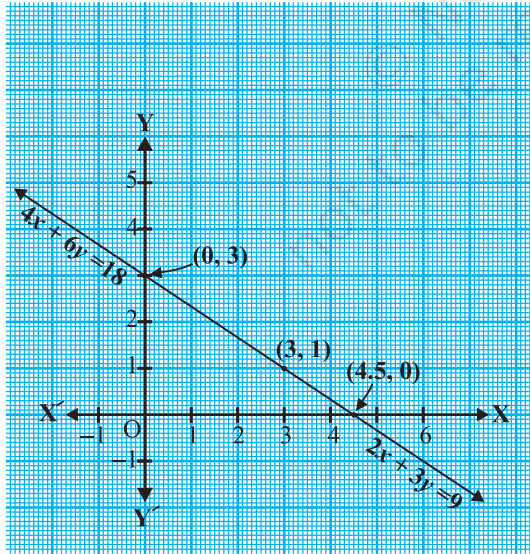
$$2x+3y=9 \qquad (1)$$
$$4x+6y=18 \qquad (2)$$

جدول 3.2

x	0	4.5
$y=\frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y=\frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

اس کے معادل جیومیٹریائی اظہار حاصل کرنے کے لئے ہر ایک مساوات کو ظاہر کرنے والے خط پر ہم دو نقطے معلوم کرتے ہیں۔یعنی ہم ہر مساوات کے دو حل معلوم کرتے ہیں۔

یہ حل مندرجہ ذیل جدول 3.2 میں دیے گئے ہیں۔

ہم ان نقطوں کو گراف پیپر پر پلاٹ کرتے ہیں اور خطوط کھینچتے ہیں۔ہم پاتے ہیں کہ دونوں خطوط منطبق ہیں (شکل 3.3 دیکھیے) یہ اس لئے ہے کہ دونوں مساواتیں معادل ہیں یعنی ایک کو دوسرے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

شکل 3.3

مثال 3: دو ریل کی پٹریاں مساواتوں $x+2y-4=0$ اور $2x+4y-12=0$ کو ظاہر کرتی ہیں اس صورت حال کو

جیومیٹریائی طور پر ظاہر کیجیے۔

حل: ہر مساوات

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$
$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

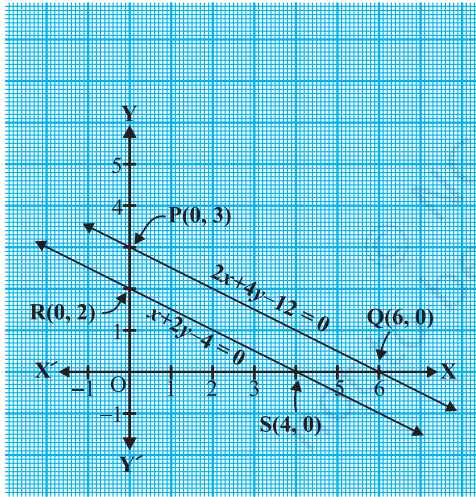
کے دو حل مندرجہ ذیل جدول 3.3 میں دیے گئے ہیں۔

جدول 3.3

x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

شکل 3.4

ان مساواتوں کو گراف پر ظاہر کرنے کے لئے ہم نقاط R(0,2) اور S(4,0) کو خط RS حاصل کرنے لیے لئے پلاٹ کرتے ہیں اور نقاط P(0,3) اور Q(6,0) خط PQ حاصل کرنے کے لیے شکل 3.4 میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ خطوط ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے یعنی یہ متوازی ہیں۔

اس طرح سے ہم نے بہت سی ایسی صورت حال دیکھ لیں جن کو خطی مساوات سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہم نے ان کے الجبری اور جیومٹری اظہار بھی دیکھے۔ اگلے کچھ سیکشنوں میں ہم دیکھیں گے کہ کس طرح سے خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کرنے میں ان اظہار کا استعمال ہوتا ہے۔

مشق 3.1

1۔ آفتاب نے اپنی بیٹی کو بتایا کہ سات سال پہلے میں تمہاری عمر کا سات گنا تھا اور اب سے 3 سال بعد میں تمہاری عمر کا 3 گنا ہو جائے گا (کیا یہ دلچسپ نہیں ہے؟) اس صورتِ حال کو الجبری اور جیومیٹریائی طور پر ظاہر کیجئے۔

2۔ کرکٹ ٹیم کے ایک کوچ نے 3 بیٹ اور 6 گیندیں 3900 روپے میں خریدیں، بعد میں اس نے اسی قسم کا ایک اور بیٹ

اور 2 گیندیں 1300 روپے میں خریدیں۔اس صورت حال کو الجبری اور جیومیٹریائی طور پر ظاہر کیجیے۔

3۔ ایک دن 2 کلوگرام سیبوں اور 1 کلوگرام انگوروں کی کل قیمت 160 روپے تھی۔ایک مہینہ بعد 4 کلوگرام سیبوں اور 2 کلو گرام انگوروں کی قیمت 300 روپے ہوگئی۔اس صورت حال کو جیومیٹریائی اور الجبری طور پر ظاہر کیجیے۔

3.3 خطی مساواتوں کے جوڑوں کا گرافی حل

پچھلے سیکشن میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ ہم خطی مساواتوں کے جوڑوں کو گراف پر کس طرح دو خطوط کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔ آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ یہ خطوط یا تو قطع کرتے ہیں یا متوازی ہوتے ہیں یا منطبق۔کیا ہر ایک حالت میں ہم ان کو حل کر سکتے ہیں؟ اگر ایسا ہے تو کیسے؟ اس سیکشن میں ہم جیومیٹری کے طریقے سے ان سوالوں کا جواب دینے کی کوشش کریں گے۔

آیئے اوپر دی گئی مثالوں پر ایک ایک کر کے غور کرتے ہیں۔

- مثال 1 کی صورت حال میں معلوم کیجیے کہ اکھیلا نے (Giant Wheel) میں کتنی چکر لگائے اور کتنی مرتبہ اس نے ہوپلا کا کھیل کھیلا۔

شکل 3.2 میں آپ نے نوٹ کیا تھا۔اس صورت حال کو ظاہر کرنے والی مساواتوں کو جیومیٹریائی طور پر دو قاطع خطوط کے طور پر دکھایا گیا تھا جو نقطہ (4,2) پر قطع کرتے ہیں اس لیے نقطہ (4,2) ان دونوں خطوط پر واقع ہے جو مساواتوں $x-2y=0$ اور $3x+4y=20$ کو ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے الجبری طور پر اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ $x=4$ اور $y=2$ دی ہوئی مساواتوں کے جوڑوں کے حل ہیں یا نہیں۔مساواتوں میں x اور y کی قدر رکھنے پر ہمیں ملتا ہے $4-2\times2=0$ اور $3(4)+4(2)=20$ اس لیے ہم نے تصدیق کر لی کہ $x=4,\ y=2$ دونوں مساواتوں کا حل ہے۔ **کیونکہ (4,2) دونوں خطوط کا واحد مشترک نقطہ ہے اس لیے اس دومتغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑے کا ایک اور صرف ایک حل ہے**

اس طرح سے اکھیلا نے جھولے میں 4 چکر لگائے اور ہوپلا کا کھیل 2 مرتبہ کھیلا۔

- مثال 2 کی صورت حال میں کیا آپ ہر ایک پنسل اور ہر ایک ربڑ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں؟

شکل 3.3 میں اس صورت حال کو جیومیٹریائی طور پر منطبق خطوط جوڑوں کے طور پر دکھایا گیا ہے۔مساواتوں کا حل ان خطوط کے مشترک نقطے ہیں۔

کیا ان خطوط پر کوئی مشترک نقطہ ہے؟ گراف سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ان منطبق خطوط پر ہرا یک نقطہ دونوں مساواتوں کا مشترک نقطہ ہے۔اس لیے ان مساواتوں $2x + 3y = 9$ اور $4x + 6y = 18$ کے لامحدود حل ہیں،اس پر ہمیں حیرت نہیں ہونی چاہیے کیونکہ اگر ہم مساوات $4x + 6y = 18$ کو 2 سے تقسیم کریں تو ہمیں مساوات $2x + 3y = 9$ حاصل ہوتی ہے جو مساوات (1) ہی ہے یعنی دونوں مساواتیں معادل ہیں۔گراف سے ہم دیکھتے ہیں خط پر موجود کوئی بھی نقطہ ہمیں ایک پنسل اور ایک ربڑ کی ممکنہ قیمت دیتا ہے۔مثال کے طور پر ہر پنسل اور ربڑ کی قیمت بالترتیب 3 روپے اور 1 روپے ہوسکتی ہے۔یا ہر ایک پنسل کی قیمت 3.75 روپے اور ہر ایک ربڑ کی قیمت 0.50 روپے ہوسکتی ہے اور ایسے ہی بہت سی قیمتیں ہوسکتی ہیں۔

- مثال 3 کی صورت حال میں کیا دونوں ریل کی پٹریاں ایک دوسرے کو کراس کریں گی؟

شکل 3.4 میں اس صورت حال کو جیومیٹریائی طور پر دو متوازی خطوط کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔کیونکہ خطوط ایک دوسرے کو بالکل قطع نہیں کرتے اس لیے ایک دوسرے کو کراس نہیں کریں گی۔اس کا مطلب ہوگا کہ مساواتوں کا مشترک حل نہیں ہے۔

خطی مساواتوں کا ایسا جوڑا جس کا کوئی حل نہیں ہوتا،غیر ہم آہنگ خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتا ہے۔دو متغیر والی خطی مساواتوں کا ایسا جوڑا جس کا حل ہوتا ہے ہم آہنگ خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتا ہے۔خطی مساواتوں کا وہ جوڑا جو معادل ہوتی ہیں اور جن کے لامحدود کئی مختلف مشترک حل ہوتے ہیں ایسے جوڑے دو متغیر والی خطی مساواتوں کے تابع (dependent) جوڑے کہلاتے ہیں۔

یہ بات نوٹ کیجئے کہ خطی مساواتوں کے تابع جوڑے ہمیشہ ہم آہنگ ہوتے ہیں ہم ذیل میں دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں کو ظاہر کرنے والے خطوط کے رویہ (behaviour) کا خلاصہ کرتے ہیں:

(i) خطوط ایک نقطہ پر قطع کر سکتے ہیں۔اس حالت میں مساواتوں کے جوڑوں کا یکتا حل ہوگا۔(ہم آہنگ مساواتوں کا جوڑا)

(ii) خطوط متوازی ہو سکتے ہیں۔اس حالت میں مساواتوں کا کوئی حل نہیں ہوگا (غیر ہم آہنگ مساواتوں کا جوڑا)

(iii) خطوط منطبق ہو سکتے ہیں۔اس حالت میں مساواتوں کے لامحدود حل ہوں گے [تابع (ہم آہنگ) مساواتوں کا جوڑا]

آیئے پھر مثال 2،1 اور 3 میں بنے خطی مساواتوں کے جوڑوں پر دوبارہ غور کیجیے اور بتایئے کے جیومیٹریائی طور پر یہ کس قسم کے جوڑے ہیں۔

(i) $x - 2y = 0$ اور $3x + 4y - 20 = 0$ (خطوط قطع کرتے ہیں)

(ii) $2x+3y-9=0$ اور $4x+6y-12=0$ (خطوط منطبق ہیں)

(iii) $x+2y-4=0$ اور $2x+4y-12=0$ (خطوط متوازی ہیں)

آیئے اب ہم تینوں مثالوں میں $\frac{a_1}{a_2}$ ، $\frac{b_1}{b_2}$ اور $\frac{c_1}{c_2}$ کی قدروں کو لکھتے ہیں اور ان کا موازنہ کرتے ہیں۔

یہاں a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 معیاری شکل دی گئی خطی مساواتوں کے ضریب میں جو سیکشن 3.2 میں دی گئی ہیں۔

جدول 3.4

نمبر شمار	خطوط کا جوڑا	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	نسبتوں کا موازنہ	گرافی اظہار	الجبری ترجمانی
1	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	قاطع خطوط	یکتا حل (صرف ایک حل)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	منطبق خطوط	لامحدود حل
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	متوازی خطوط	کوئی حل نہیں

مذکورہ بالا جدول سے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ اگر خطوط کو مساواتوں

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

اور

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

سے ظاہر کیا جائے تو خطوط

(i) قاطع ہوں تو $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

(ii) منطبق ہوں تو $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(iii) متوازی ہو تو $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

درحقیقت کسی بھی خطوط کے جوڑنے کے لئے اس کا معکوس بھی درست ہے۔ اس کی تصدیق آپ کچھ اور مثالیں لے کر کر سکتے ہیں۔

آیئے اس کی مزید وضاحت کے لئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 4: جانچ کیجئے کہ آیا مساواتوں کا جوڑا

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

اور

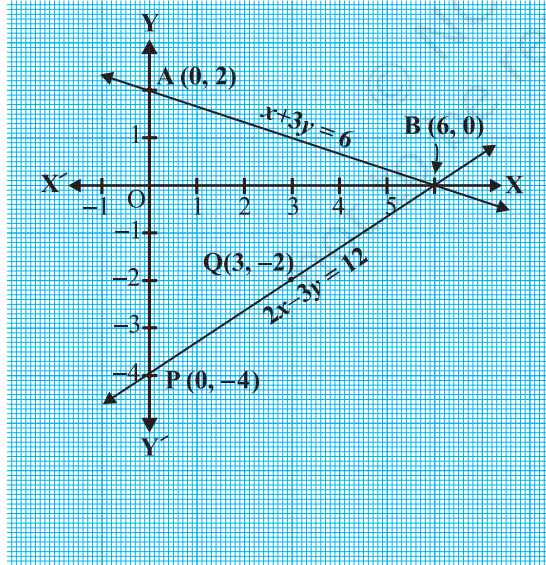
$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

ہم آہنگ ہے یا نہیں، اگر ہے تو گراف کی مدد سے حل کیجئے۔

حل: مساواتوں (1) اور (2) کا گراف بنائیے۔ اسکے لئے ہم ہر ایک مساوات کے کم سے کم دو حل لیں گے۔ جو جدول 3.5 میں دکھائے گئے ہیں۔

جدول 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	–4	–2

نقاط A(0,2)، B(6,0)، P(0,–4) اور Q(3,–2) کو گراف پیپر پر پلاٹ کیجئے۔ اور ان نقاط کو ملا کر خطوط AB اور PQ کھینچئے جیسا کہ شکل 3.5 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ گراف میں ایک نقطہ B(6,0) ہے جو دونوں خطوط AB اور PQ میں مشترک ہے اس لئے مساواتوں کے جوڑے کا حل $x = 6$ اور $y = 0$ ہے یعنی دی ہوئی مساواتیں ہم آہنگ ہیں۔

شکل 3.5

مثال 5: گراف کی مدد سے معلوم کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑوں کے یکتا حل ہیں لا محدود حل ہیں یا کوئی حل نہیں ہے۔

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

حل: مساوات (2) کو $\frac{5}{3}$ سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$5x - 8y + 1 = 0$$

لیکن یہ مساوات ایسی ہی ہے جیسی مساوات (1) اس لئے مساوات (1) اور (2) سے ظاہر ہونے والے خطوط منطبق ہیں۔ اس لئے مساوات (1) اور (2) کے لامحدود حل ہیں۔

گراف پر کچھ نقطے پلاٹ کر کے آپ خود اس کی تصدیق کریں۔

مثال 6: چمپا کچھ پینٹ اور اسکرٹ خریدنے ایک "Sale" میں گئی۔ جب اس کی دوست نے پوچھا کہ اس نے دونوں چیزیں کتنی کتنی خریدیں۔ اس نے جواب دیا کہ خریدی گئیں اسکرٹ کی تعداد خریدی گئیں پینٹ کی تعداد کے دگنے سے دو کم ہیں۔ مزید اسکرٹ کی تعداد پینٹ کی تعداد کے چار گنے سے 4 کم ہے۔ یہ معلوم کرنے میں اس کی دوست کی مدد کیجئے کہ چمپا نے کتنی پینٹ اور کتنی اسکرٹ خریدیں۔

حل: مان لیجئے اس نے x پینٹ اور y اسکرٹ خریدیں۔ تب مساواتیں ہوں گی۔

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

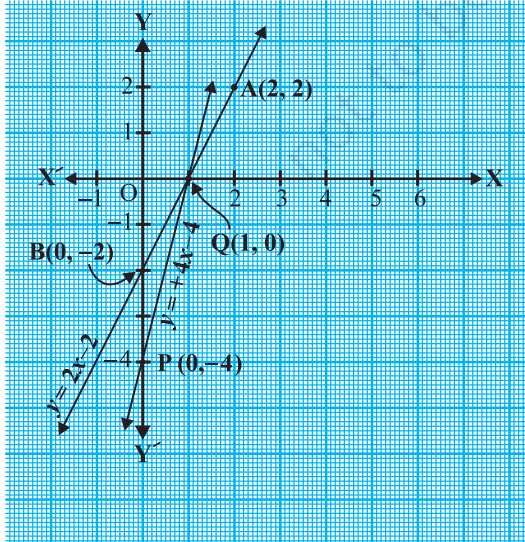
اور

$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

آیئے مساواتوں (1) اور (2) کے گراف کھینچتے ہیں۔ اس کے لئے ہر ایک مساوات کے دو حل معلوم کیجئے۔ یہ جدول 3.6 میں دئے گئے ہیں۔

جدول 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	–2

x	0	1
$y = 4x - 4$	–4	0

نقطوں کو پلاٹ کیجئے اور ان سے گزرتے ہوئے مساواتوں کو ظاہر کرنے والے خطوط کھینچئے جیسا کہ شکل 3.6 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 3.6

دونوں خطوط ایک دوسرے کے نقطے (1,0) پر قطع کرتے ہیں، اس لئے x =1 , y = 0 خطی مساواتوں کے جوڑوں کا مطلوبہ حل ہے۔ یعنی اس نے 1 پینٹ خریدی اور اور کوئی اسکرٹ نہیں خریدی۔

اپنے جواب کی تصدیق کے لئے آپ یہ جانچ کر سکتے ہیں کہ یہ دی ہوئی مساواتوں کو مطمئن کرتا ہے یا نہیں۔

مشق 3.2

1۔ مندرجہ ذیل سوالوں میں مساواتوں کے جوڑے بنائیے اور گرافی طور پر ان کے حل معلوم کیجئے۔

(i) دسویں کلاس کے 10 طلبا نے ریاضی کے ایک کوئز میں حصہ لیا۔ اگر لڑکیوں کی تعداد لڑکوں کی تعداد سے 4 زیادہ ہے۔ تو اس کوئز میں حصہ لینے والے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

(ii) 5 پنسلوں اور 7 پینوں کی کل قیمت 50 روپے ہے۔ جب کہ 7 پنسل اور 5 پینوں کی کل قیمت 46 روپے۔ ایک پنسل اور ایک پین کی قیمت معلوم کیجئے۔

2۔ نسبتوں $\frac{a_1}{a_2}$ ، $\frac{b_1}{b_2}$ اور $\frac{c_1}{c_2}$ کا موازنہ کرتے ہوئے معلوم کیجئے کہ مندرجہ خطی مساواتوں کے جوڑوں کو ظاہر کرنے والے خطوط ایک نقطے پر قطع کرتے ہیں، متوازی ہیں یا منطبق ہیں۔

(i) $5x-4y+8=0$
$7x+6y-9=0$

(ii) $9x+3y+12=0$
$18x+6y+24=0$

(iii) $6x-3y+10=0$
$2x-y+9=0$

3۔ نسبتوں $\frac{a_1}{a_2}$ ، $\frac{b_1}{b_2}$ اور $\frac{c_1}{c_2}$ کا موازنہ کرتے ہوئے معلوم کیجئے کہ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑے ہم آہنگ ہیں یا غیر ہم آہنگ۔

(i) $3x+2y=5; 2x-3y=7$

(ii) $2x-3y=8; 4x-6y=9$

(iii) $\frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y=7; 9x-10y=14$

(iv) $5x-3y=11; -10x+6y=-22$

(v) $\frac{4}{3}x+2y=8; 2x+3y=12$

4۔ مندرجہ ذیل میں کون سی خطی مساواتیں ہم آہنگ ہیں اور کون سی غیر ہم آہنگ۔ اگر ہم آہنگ ہیں تو ان کو گراف کی

مدد سے حل کیجئے:

(i) $x+y=5,$ $2x+2y=10$

(ii) $x-y=8$ $3x-3y=16$

(iii) $2x+y-6=0$ $4x-2y-4=0$

(iv) $2x-2y-2=0$ $4x-4y-5=0$

5۔ ایک مستطیل باغ سے جس کی لمبائی اس کی چوڑائی سے نصف احاطہ 36 سم ہے۔ 4 میٹر زیادہ باغ کی ابعاد معلوم کیجئے۔

6۔ ایک خطی مساوات $2x+3y-8=0$ دی ہوئی ہے۔ ایک دوسری دو متغیر والی ایسی خطی مساوات لکھئے جبکہ ان مساواتوں کے جوڑوں کا جیومیٹریائی اظہار

(i) خطوط قاطع ہو

(ii) خطوط متوازی ہو

(iii) خطوط منطبق ہو

7۔ مساواتوں $x-y+1=0$ اور $3x+2y-12=0$ کا گراف بنائیے۔ ان دونوں خطوط اور x- محور سے بنے مثلث کے دو راسوں کے مختصات بھی معلوم کیجئے اور مثلثی خطہ کو شیڈ کیجئے۔

3.4 خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کرنے کے الجبری طریقے

پہلے سیکشن میں ہم نے مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنے کا طریقہ سیکھا، ایسی شکل میں گراف کا طریقہ مناسب نہیں ہے جب خطی مساواتوں کا حل غیر صحیح اعداد ہے $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$، $(-1.75, 3.3)$، $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ وغیرہ ہوں۔ کیونکہ اس طرح کے مختصات پڑھنے میں غلطی کے امکان بہت زیادہ ہیں۔ کیا حل معلوم کرنے کا کوئی متبادل طریقہ بھی ہے؟ ایسے بہت سے الجبری طریقے ہیں۔ جن کا مطالعہ ہم اس سیکشن میں کریں گے۔

3.4.1 بدل کا طریقہ: بدل کے طریقہ کی تشریح کرنے کے لئے ہم کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 7: مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑے کو بدل کے طریقہ سے حل کیجئے۔

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

حل:

قدم 1: ہم دونوں میں سے کسی ایک مساوات کو چنتے ہیں اور ایک متغیر کو دوسرے کی شکل میں لکھتے ہیں۔ آیئے مساوات (2) کو لیتے ہیں۔

$$x + 2y = 3$$

اور اس کو اس طرح لکھتے ہیں $x = 3 - 2y$ (3)

قدم 2: x کی قدر مساوات (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

یعنی $21 - 14y - 15y = 2$

یعنی $-29y = -19$

اس لئے $y = \frac{19}{29}$

قدم 3: y کی اس قدر کو مساوات (3) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

اس لئے حل ہے $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$

تصدیق: $x = \frac{49}{29}$ اور $y = \frac{19}{29}$ رکھنے پر آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ دونوں مساواتیں (1) اور (2) مطمئن ہو جائیں گی۔

بدل (substuition) کے طریقے کو اچھی طرح سمجھنے کے لئے آیئے اس کو قدم بہ قدم لیتے ہیں۔

قدم 1: کسی بھی ایک متغیر y (مان لیجئے) کی قدر دوسرے متغیر x کی شکل میں معلوم کیجئے۔

قدم 2: y کی اس قدر کو دوسری مساوات میں رکھئے اور اس مساوات کو ایک متغیر والی مساوات میں بدل دیجئے یعنی x میں، جس کو آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔ کبھی کبھی جیسے کے ذیل میں مثال 9 اور 10 میں ہے۔ آپ کو اپنا بیان ملے گا جس میں کوئی متغیر

نہیں ہوگا اگر یہ بیان درست ہے تو آپ یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ قطعی مساواتوں کے جوڑے کے لامحدود حل ہوں گے۔ اگر بیان درست نہیں ہے تو تب خطی مساواتوں کا جوڑا غیر ہم آہنگ ہوگا۔

قدم 3: قدم (2) میں ملی (x) (یا y) کی قدر کو قدم 1 میں استعمال ہوئی مساوات میں رکھئے اس سے آپ کو دوسرے متغیر کی قدر حاصل ہو جائے گی۔

ریمارک: خطی مساواتوں کے جوڑے حل کرنے کے لئے ہم اس متغیر کی قدر مساوات میں رکھی جس کو دوسرے متغیر کی شکل میں ظاہر کیا گیا تھا۔ اس لئے یہ طریقہ بدل کا طریقہ کہلاتا ہے۔

مثال 8: مشق 3.1 کے سوال نمبر 1 کو بدل کے طریقہ سے حل کیجئے۔

حل: مان لیجئے s اور t بالترتیب آفتاب اور اس کی بیٹی کی عمر میں ہیں تب خطی مساواتوں کا وہ جوڑا جو اس صورت حال کو ظاہر کرتا ہے۔

$s - 7 = 7(t - 7)$ یعنی $s - 7t + 42 = 0$ (1)

اور $s + 3 = 3(t + 3)$ یعنی $s - 3t = 6$ (2)

مساوات (2) کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $s = 3t + 6$

s کی اس قدر کو مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

یعنی $4t = 48$ جس سے $t = 12$ حاصل ہوتا ہے۔

t کی اس قدر کو مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

اس لئے آفتاب اور اس کی بیٹی بالترتیب 42 اور 12 سال کے ہیں۔

اس جواب کی تصدیق آپ اس کو دونوں مساواتوں میں رکھ کر کر سکتے ہیں اگر یہ دونوں مساواتوں کو مطمئن کرے۔

مثال 9: آیئے سیکشن 3.3 کی مثال 2 پر غور کیجئے یعنی 2 پنسل اور 3 ربڑ کی کل قیمت 9 روپے ہے اور 4 پنسل اور 6 ربڑ کی قیمت 18 روپے تو پنسل اور ربڑ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: بنا ہوا خطی مساواتوں کا جوڑا تھا۔

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

پہلے ہم مساوات $2x + 3y = 9$ میں سے x کی قدر کو y کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں جس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \qquad (3)$$

اب x کی اس قدر کو مساوات (2) میں رکھتے ہیں، اس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

یعنی $$18 - 6y + 6y = 18$$

یعنی $$18 = 18$$

یہ بیان یعنی y کی تمام قدروں کے لئے درست ہے۔ لیکن ہمیں حل کے طور پر y کی کوئی مخصوص قدر نہیں ملتی اس لئے ہمیں x کی بھی کوئی مخصوص قدر نہیں ملتی۔ یہ صورت حال اس لئے پیدا ہوئی کے دونوں مساواتیں معادل ہیں۔ اس لئے مساوات (1) اور (2) کے لامحدود حل ہوں گے۔ مشاہدہ کیجئے کہ گرافی طور پر حل کرنے میں بھی ہمیں یہی حل ملا تھا (شکل 3.3، سیکشن 3.2 میں دیکھئے) ہمیں پنسل اور ربڑ کی ایک یکتا قیمت نہیں ملے گی، کیونکہ یہاں بہت سے مشترک حل ہیں۔

مثال 10: آیئے سیکشن 3.2 میں دی گئی مثال 3 پر غور کیجئے۔ کیا ریل ایک دوسرے کو کراس کریں گی۔

حل: اس صورت حال میں خطی مساواتوں کا جوڑا تھا۔

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

اب ہم مساوات (1) میں، x کو y کی شکل میں رکھتے ہیں جس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = 4 - 2y$$

اب ہم x کی اس قدر کو مساوات (2) میں رکھتے ہیں، اس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

یعنی $$8 - 12 = 0$$

یعنی $$-4 = 0$$

جو کے ایک غلط بیان ہے۔

اس لئے ان مساواتوں کا مشترک حل نہیں ہے۔ اس لئے دونوں ریل ایک دوسرے کو کراس نہیں کریں گی۔

مشق 3.3

1۔ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کو بدل کے طریقہ سے حل کیجئے۔

(i) $x + y = 14$; $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$; $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$; $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$; $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$; $\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2۔ $2x + 3y = 11$ اور $2x - 4y = -24$ کو حل کیجئے اور پھر 'm' کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے $y = mx + 3$

3۔ مندرجہ ذیل مسلوں کے خطی مساواتوں کے جوڑے بنائیے اور بدل کے طریقہ سے ان کا حل معلوم کیجئے۔

(i) دو اعداد کا فرق 26 ہے ان میں سے ایک عدد دوسرے کا تین گنا ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

(ii) تتمی زاویوں کا بڑا زاویہ چھوٹے زاویہ سے 18 ڈگری زیادہ ہے۔ زاویہ بتائیے۔

(iii) کرکٹ ٹیم کے کوچ نے 7 بیٹ اور 6 گیندیں 3800 روپے میں خریدیں۔ بعد میں اس نے 3 بیٹ اور 5 گیندیں 1750 روپے میں خریدیں۔ بیٹ اور گیند کی قیمت معلوم کیجئے۔

(iv) کسی شہر میں ٹیکسی کے کرایہ میں ایک تو متعین کرایہ ہوتا ہے اور اس کے ساتھ جتنا فاصلہ طے کیا جاتا ہے اس کا کرایہ ہوتا ہے۔ 10 کلومیٹر کے فاصلہ کے دیا گیا کل کرایہ 105 روپے اور 15 کلومیٹر کے فاصلہ کے لئے کل کرایہ 155 روپیہ ہے۔ تو متعین کرایہ اور فی کلومیٹر کرایہ معلوم کیجئے؟ 25 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے کے لئے کسی شخص کو کتنا کرایہ دینا پڑے گا؟

(v) اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 2 جمع کر دیا جائے تو کسر $\frac{9}{11}$ ہو جاتی ہے اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں 3 جمع کر دیا جائے تو کسر $\frac{5}{6}$ ہو جاتی کسر معلوم کیجئے۔

(vi) 5 سال بعد جیکب کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کی تین گنا ہوگی۔ پانچ سال پہلے جیکب کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کی 7 گنا تھی۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجئے۔

3.4.2 اخراج کا طریقہ

آیئے ایک اور طریقے پر غور کرتے ہیں جس میں ایک متغیر کا اخراج کیا جاتا ہے۔ کبھی کبھی یہ طریقہ بدل کے طریقہ سے زیادہ مناسب ہوتا ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں یہ طریقہ کس طرح عمل پیرا ہوتا ہے۔

مثال 11: دو اشخاص کی آمدنی کی نسبت 9:7 اور خرچ کی نسبت 4:3 ہے اگر دونوں میں سے ہر ایک 2000 روپے مہینہ بچاتا ہے تو ان کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجئے۔

حل : مانا دونوں اشخاص کی آمدنی $9x$ اور $7x$ ہے اور ان کے اخراجات بالترتیب $4y$ اور $3y$ ہیں، تو اس صورت حال میں مساواتیں ہوں گی۔

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

$$7x - 3y = 2000 \quad \text{اور} \ (2)$$

قدم 1: مساوات (1) کو 3 سے اور (2) کو 4 سے ضرب کر کے y کے ضریبوں کو یکساں بنا لیجئے تب ہمارے پاس مساواتیں ہوتی ہیں۔

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad \text{اور} \ (4)$$

قدم 2: y کا اخراج کرنے کے لئے مساوات (3) کو (4) میں سے گھٹایئے۔ کیونکہ y کے ضریب یکساں ہیں۔ اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(28x - 27x) - (27x - 12y) = 8000 - 6000$$

$$x = 2000 \quad \text{یعنی}$$

قدم 3: x کی اس قدر کو (1) میں رکھ کر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$9(2000) - 4y = 2000$$

یعنی $y = 4000$

اس لئے مساواتوں کا حل ہے $x = 2000$, $y = 4000$ اس لئے اشخاص کی ماہانہ آمدنی ہے بالترتیب 18000 روپے اور 14000 روپے۔

تصدیق: 18000:14000=9:7 اور ان کے اخراجات کی نسبت 18000–2000:14000–2000=16000:12000=4:3

ریمارک:

1۔ مذکورہ بالا مثال کو حل کرنے میں استعمال ہوا طریقہ اخراج کا طریقہ کہلاتا ہے۔ کیونکہ پہلے ہم ایک متغیر کو خارج کرتے ہیں جس سے ہمیں ایک متغیر والی مساوات مل جاتی ہے۔ مذکورہ بالا مثال میں ہم نے y کو خارج کیا۔ ہم x کو بھی خارج کر سکتے تھے۔ اس طرح کر کے بھی سوال کو حل کیجئے۔

(2) اس سوال کو حل کرنے کے لئے آپ گراف اور بدل کے طریقہ بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ایسا کیجئے اور دیکھئے کہ کون سا طریقہ زیادہ مفید ہے:

آیئے اخراج کے طریقہ میں استعمال ہوئے اقدام کو نوٹ کرتے ہیں:

قدم 1: سب سے پہلے ہم دونوں مساواتوں کو ایک مناسب غیر صفر مستقلہ سے ضرب کرتے ہیں تا کہ کسی ایک متغیر (x یا y) کے ضریب عددی طور پر یکساں ہو جائیں۔

قدم 2: پھر ایک مساوات کو دوسری مساوات میں جمع یا گھٹا کر کیجئے تا کہ ایک متغیر خارج ہو جائے۔ اگر آپ کو ایک متغیر میں مساوات حاصل ہو جائے تو قدم 3 کی طرف آگے بڑھئے۔

اگر قدم 2 میں متغیر والا کوئی غلط بیان ملتا ہے تب ان مساواتوں کا کوئی حل نہیں ہوگا۔ یہ غیر ہم آہنگ ہوگی۔

قدم 3: قدم 2 سے ملی ایک متغیر (x یا y) کی مساوات کو حل کیجئے۔ اور اس کی قدر معلوم کیجئے۔

قدم 4: (x یا y) کی اس قدر کو اصل مساواتوں میں سے کسی ایک مساوات میں رکھ کر دوسرے متغیر کی قدر معلوم کیجئے۔

اس کی مزید وضاحت کے لئے ہم کچھ اور مساواتوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 12: اخراج کے طریقہ سے مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کے تمام ممکنہ حل معلوم کیجئے۔

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

حل:

قدم 1: x کے ضریب کو یکساں بنانے کے لئے مساوات (1) کو 2 سے اور (2) کو 1 سے ضرب کیجئے۔ تب ہمیں مساواتیں ملتی ہیں وہ اس طرح ہیں:

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

قدم 2: مساوات (4) کو (3) میں سے گھٹانے پر

$$(4x - 4x) + (6y - 6y)\ 16 - 7 =$$

یعنی $0 = 9$ جو کے ایک غلط بیان ہے۔

اس لئے مساواتوں کے جوڑوں کا کوئی حل نہیں ہے۔

مثال 13: ایک دو ہندسی عدد اور ہندسوں کے مقام تبدیل ہونے سے بننے والے عدد کا حاصل جمع 66 ہے اگر عدد کے ہندسوں میں فرق 2 کا ہو تو عدد معلوم کیجئے۔ ایسے کل کتنے عدد ہیں۔

حل: مان لیجئے پہلے عدد کا دہائی کا اور اکائی کا ہندسہ بالترتیب x اور y ہے۔ اس لئے پہلا عدد پھیلی ہوئی شکل میں ہے $10x + y$ (مثال کے طور پر $56 = 10\ (5) + 6$)

جب ہندسوں کی جگہ تبدیل کردی جائے تب x اکائی کا ہندسہ اور y کا دہائی کا ہندسہ بن جاتا ہے۔ اس لئے پھیلی ہوئی شکل میں یہ عدد ہوگا $10y+x$ (مثال کے طور پر جب 56 کے ہندسوں کی جگہ تبدیل کردی جائے تو $65 = 10\ (6) + 5$ حاصل ہوتا ہے)

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

یعنی $$11(x + y) = 66$$

یعنی $$x + y = 6 \quad (1)$$

ہمیں یہ بھی دیا ہوا ہے کہ ہندسوں میں 2 کا فرق ہے اس لئے

یا تو $$x - y = 2 \quad (2)$$

یا $$y - x = 2 \quad (3)$$

اگر $x - y = 2$ ہے تو (1) اور (2) کو حل کرنے پر (اخراج کے طریقہ سے) ہمیں $x = 4$ اور $y = 2$ ملتا ہے اس حالت میں عدد 42 ہوگا۔

اگر $y - x = 2$ تب اخراج کے طریقہ سے (1) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں $x = 2$ اور $y = 4$ ملتا ہے اس حالت میں عدد 24 ہوگا۔ اس طرح سے ایسے دو عدد ہیں 42 اور 24

تصدیق: یہاں $42 + 24 = 66$ اور $4 - 2 = 2$ اور $24 + 42 = 66$ اور $4 - 2 = 2$

مشق 3.4

1۔ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کو اخراج اور بدل کے طریقوں سے حل کیجئے۔

(i) $x + y = 5$ اور $2x - 3y = 4$

(ii) $3x + 4y = 10$ اور $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ اور $9x = 2y + 7$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ اور $x - \frac{y}{3} = 3$

2۔ مندرجہ ذیل سوالوں میں خطی مساواتوں کے جوڑوں کی تشکیل کیجئے اور اخراج کے طریقہ سے ان کے حل معلوم کیجئے۔ (اگر حل ہوں)

(i) اگر ہم کسی کسر کے شمار کنندہ میں 1 جمع کریں اور نسب نما میں سے 1 گھٹا دیں تو کسر 1 ہو جاتی ہے۔ اگر ہم اس کسر کے صرف نسب نما میں 1 جمع کریں تو کسر $\frac{1}{2}$ ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کیجئے؟

(ii) پانچ سال پہلے نوری کی عمر سونو کی عمر کا تین گنا تھی۔ دس سال بعد نوری کی عمر سونو کی عمر کی دگنی ہوگئی نوری اور سونو کی موجودہ عمر کیا ہے؟

(iii) ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع 9 ہے۔ اور اس عدد کا نو گنا ہندسوں کی جگہ تبدیل کر کے ملنے والے عدد کے دو گنے برابر ہے۔ عدد معلوم کیجئے۔

(iv) مینا 2000 روپے نکالنے کے لئے بینک گئی اس نے کیشئر سے صرف 50 روپے اور 100 روپے کے نوٹ مانگے مینا کو کل 25 نوٹ ملے۔ معلوم کیجئے اس کو 50 روپے اور 100 روپے والے کتنے نوٹ ملے۔

(v) ایک لائبریری کا پہلے تین دن تک ایک متعین چارج ہے اور اس کے بعد ہر ایک دن کا ایک اضافی چارج ہے۔ سریتا ایک کتاب کو 7 دن تک اپنے پاس رکھتی ہے اور 27 روپئے ادا کرتی ہے جبکہ سوزی اس کتاب کو 5 دن تک رکھتی ہے اور 21 روپئے ادا کرتی ہے۔ متعین چارج اور ہر ایک دن کا اضافی چارج معلوم کیجئے۔

3.4.3 ترچھی ضرب کا طریقہ

اب تک آپ نے سیکھا ہے کہ دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں کو کس طرح سے بدل کے گراف اور اخراج کے طریقے سے حل کیا جاتا ہے۔ یہاں ایک دوسرے الجبری طریقے سے آپ کو متعارف کرا رہے ہیں جس سے آپ ان مساواتوں کو حل کر سکتے ہیں۔ کئی وجوہات کی بنا پر مساواتوں کو حل کرنے کا یہ طریقہ بہت مفید ہے۔ اس سے پہلے کے ہم آگے بڑھیں۔ آیئے پہلے ہم مندرجہ ذیل صورتِ حال پر غور کرتے ہیں۔

5 سنتروں اور 3 سیبوں کی قیمت 35 روپے ہے 2 سنتروں اور 4 سیبوں کی قیمت 28 روپے ہے۔ ایک سنترے اور ایک سیب کی قیمت معلوم کیجئے۔

مان لیجئے ایک سنترے کی قیمت x روپے اور ایک سیب کی قیمت y روپے ہے۔ اس لئے اس صورت حال کی مساواتیں ہوں گی۔

$$5x + 3y = 35 \text{ یعنی } 5x + 3y - 35 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y = 28 \text{ یعنی } 2x + 4y - 28 = 0 \qquad (2)$$

آیئے اخراج کے طریقے سے اس کو حل کرتے ہیں

مساوات (1) کو 4 سے اور مساوات (2) کو 3 سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \qquad (3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \qquad (4)$$

مساوات (4) کو مساوات (3) سے گھٹانے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

اس لئے
$$x = \frac{-[(4)(-35) - (3)(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

یعنی
$$x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)}$$

اگر مساواتیں (1) اور (2) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ کی طرح لکھی جائیں

تب ہمارے پاس ہے $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = -35, a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -28$

تب مساوات (5) کو ہم لکھ سکتے ہیں $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

اسی طرح سے $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

مساوات (5) کو مختصر کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x = \frac{-84 + 140}{20 - 6} = 4$$

اسی طرح سے
$$y = \frac{(-35)(2) - (5)(-28)}{20 - 6} = \frac{-70 + 140}{14} = 5$$

اس لئے $x = 4$ اور $y = 5$ دی ہوئی مساواتوں کا حل ہے۔

اس لئے ایک سنترے کی قیمت 4 روپے اور ایک سیب کی قیمت 5 روپے ہوگی۔

تصدیق: 3 سیبوں کی قیمت + 5 سنتروں کی قیمت = 15 روپے + 20 روپے = 35 روپے

اسی طرح سے 4 سیبوں کی قیمت + 2 سنتروں کی قیمت = 20 روپے + 8 روپے = 28 روپے

اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی خطی مساواتوں کے جوڑوں کے لئے یہ طریقہ کس طرح کام کرتا ہے۔

(1) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

اور (2) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

x اور y کی قدر معلوم کرنے کے لئے جیسا کے اوپر دکھایا گیا ہے۔ ہم مندرجہ ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

قدم 1: ہم مساوات (1) کو b_2 سے اور (2) کو b_1 سے ضرب کرتے ہیں۔

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \qquad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \qquad (4)$$

قدم 2: (4) کو (3) میں سے گھٹانے پر:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2b_1 - b_1b_2)y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

یعنی

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (5)$$ اگر $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

قدم 3: x کی اس قدر کو (1) یا (2) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (6)$$

اب دو حالتیں پیدا ہوتی ہیں:

حالت 1: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ اس حالت میں $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ تب خطی مساواتوں کے جوڑوں کا یکتا حل ہوگا۔

حالت 2: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ اگر ہم اس طرح $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ رکھیں تب $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$

a اور b کی قدریں مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$k(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad (7)$$

یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ دونوں مساواتیں (7) اور (2) مطمئن ہو سکتی ہیں اگر $c_1 = kc_2$ یعنی $\frac{c_1}{c_2} = k$.

اگر $c_1 = kc_2$ تو مساوات (2) کا کوئی بھی حل مساوات (1) کو مطمئن کرے گا۔ اور یونہی اس کے برعکس بھی۔ اس لئے

اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ تب (1) اور (2) میں دی گئی خطی مساواتوں کے جوڑوں کے لامحدود حل ہوں گے۔

اگر $c_1 \neq kc_2$ تب مساوات (1) کا کوئی بھی حل مساوات (1) کو مطمئن نہیں کرے گا اور یوں ہی اس کے برعکس۔ اس لئے جوڑے کا کوئی حل نہیں ہوگا۔

ہم مذکورہ بالا (1) اور (2) میں دئے گئے خطی مساواتوں کے جوڑوں پر ہوئی بحث کا خلاصہ ذیل میں کرتے ہیں۔

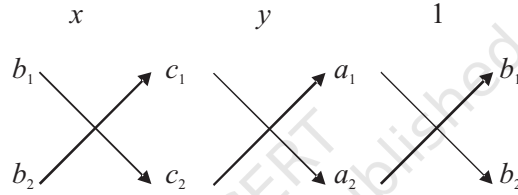
(i) جب $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ تو ہمیں ایک یکتا حل ملے گا

(ii) جب $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ تب لامحدود حل ہوں گے

(iii) جب $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ تب کوئی حل نہیں ہوگا

نوٹ کیجئے کہ آپ مساواتوں (5) اور (6) کے ذریعے دیے گئے حلوں کو مندرجہ ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

مذکورہ بالا نتیجہ کو یاد رکھنے کے لئے مندرجہ ذیل ڈائیگرام کافی مفید ہوگا۔

دو اعداد کے درمیان تیروں کا مطلب ہے کہ ان کو ضرب کیجئے اور دوسرے حاصل ضرب کو پہلے میں سے گھٹا دیجیے خطی مساواتوں کے جوڑوں کو اس طریقہ سے حل کرنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل اقدام اٹھائیں گے۔

قدم 1: دی ہوئی مساواتوں کو (1) اور (2) کی شکل میں لکھیے۔

قدم 2: اوپر دیے گئے ڈائی گرام کی مدد لے کر مساواتوں کو اس طرح لکھئے جیسا (8) میں دکھایا گیا ہے۔

قدم 3: x اور y معلوم کیجیے اگر

قدم 2 سے ہمیں اندازہ ہوتا ہے کہ کیوں یہ طریقہ ترچھی ضرب کا طریقہ کہلاتا ہے۔

مثال 14: بنگلور کے ایک بس اسٹینڈ سے اگر ہم 2 ٹکٹ مالیشورم اور 3 ٹکٹ یشونت پور کے خریدیں تو ہمیں کل 46 روپے ادا کرنے پڑیں گے اور اگر ہم 3 ٹکٹ مالیشورم اور 5 ٹکٹ یشونت پور کے خریدیں تو 74 روپے دینے پڑتے ہیں۔ بس اسٹینڈ سے مالیشورم اور یشونت پور کا کرایہ معلوم کیجیے۔

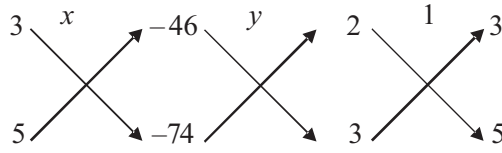
حل : مان لیجئے بس اسٹینڈ سے مالیشورم تک کا کرایہ x روپے اور یشونت پور کا کرایہ y روپے ہے تو سوال کے مطابق

ہمارے پاس؛

$$2x + 3y = 46 \text{ یعنی } 2x + 3y - 46 = 0 \quad (1)$$

$$3x + 5y = 74 \text{ یعنی } 3x + 5y - 74 = 0 \quad (2)$$

مساواتوں کو ترچھی ضرب کے ذرائع حل کرنے کے لیے ہم ذیل میں پہلے مذکورہ بالا ڈائی گرام بناتے ہیں۔

$$\begin{matrix} 3 & \overset{x}{\times} & -46 & \overset{y}{\times} & 2 & \overset{1}{\times} & 3 \\ 5 & & -74 & & 3 & & 5 \end{matrix}$$

تب
$$\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$$

یعنی
$$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

یعنی
$$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

یعنی
$$\frac{x}{8} = \frac{1}{1} \text{ اور } \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

یعنی
$$x = 8 \text{ اور } y = 10$$

اس لئے بنگلور کے بس اسٹینڈ سے مالیشورم کا کرایہ 8 روپے اور یشونت پور کا کرایہ 10 روپے ہوتا ہے۔

تصدیق: آپ اپنے جواب کی جانچ ان قدروں کو مساواتوں میں رکھ کر کر سکتے ہیں۔

مثال 15: p کی کس قدر کے لیے مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کا یکتا حل ہوگا؟

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

حل: یہاں $a_1 = 4, \quad a_2 = 2, \quad b_1 = p, \quad b_2 = 2$

اب ہم جانتے ہیں کہ دیے ہوئے جوڑے کے یکتا حل ہوں گے اگر: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

یعنی
$$\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

یعنی
$$p \neq 4$$

اس لئے p کی 4 کے علاوہ تمام قدروں کے لئے دی ہوئی مساواتوں کے جوڑوں کے یکتا حل ہوں گے۔

مثال 16: k کی کس قدر کے لئے مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کے لامحدود حل ہوں گے۔

$$kx + 3y - (k-3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

حل: یہاں، $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

ہم جانتے ہیں کہ خطی مساواتوں کے جوڑوں کے لامحدود حل ہوتے ہیں اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

اس لئے $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

یا $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

جس سے ہمیں ملتا ہے $k^2 = 36$ یعنی $k = \neq 6$

اور $\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

جس سے ہمیں ملتا ہے $3k^2 - 3k$ یعنی $6k = k^2$ جس کا مطلب ہے $k = 0$ یا $k = 6$

اس لئے k کی وہ قدر جو دونوں شرطوں کو مطمئن کرتی ہے وہ ہے $k = 6$ ، k کی اس قدر کے لئے دئے گئے خطی مساواتوں کے جوڑوں کے لامحدود حل ہوں گے۔

مشق 3.5

1۔ مندرجہ ذیل میں کون سے خطی مساواتوں کے جوڑوں کے یکتا لامحدود حل یا کوئی حل نہیں ہے۔ اگر ان کا یکتا حل ہے تو اسے ترچھی ضرب کے طریقے سے معلوم کیجئے۔

(i) $x - 3y - 3 = 0$ ، $3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$ ، $3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$

$3x - 3y - 15 = 0$ $\qquad$ $6x - 10y = 40$

2۔ (i) a اور b کی کن قدروں کے لئے مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کے لامحدود حل ہوں گے۔

$2x + 3y = 7$

$(a - b)\,x + (a + b)\,y = 3a + b - 2$

(ii) k کی کس قدر کے مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑے کا کوئی حل نہیں ہے۔

$3x + y = 1$

$(2k - 1)\,x + (k - 1)y = 2k + 1$

3۔ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کو بدل اور ترچھی ضرب کے طریقوں سے حل کیجئے۔

$8x + 5y = 9$

$3x + 2y = 4$

4۔ مندرجہ ذیل مسئلوں کے خطی مساواتی جوڑے بنایئے اور ان کے حل (اگر موجود ہوں) کسی بھی الجبری طریقہ سے معلوم کیجئے۔:

(i) کسی ہوسٹل کے ماہانہ کرایہ کا ایک حصہ متعین ہے اور باقی کا حصہ اس بات پر منحصر ہے کہ کوئی طالب علم کتنے دن وہاں کے میس سے کھانا لیتا ہے۔ جب کوئی طالب علم A وہاں سے 20 دن تک کھانا لیتا ہے تو اسے ہاسٹل کے کرایہ کے طور پر 1000 روپے دینے پڑتے ہیں۔ جب کے ایک طالب علم B جو 26 دن تک کھانا لیتا ہے اسے 1180 روپے ہاسٹل کا کرایہ دینا پڑتا ہے۔ متعین کرایہ اور فی دن کھانے کا خرچ معلوم کیجئے۔

(ii) ایک کسر کے شمار کنندہ میں سے جب 1 گھٹاتے ہیں تو وہ $\frac{1}{3}$ ہو جاتی ہے اور جب اس کے نسب نما میں جب 8 جمع کرتے ہیں تو یہ $\frac{1}{4}$ ہو جاتی ہے، کسر معلوم کیجئے۔

(iii) یش نے ایک ٹسٹ میں 40 نمبر حاصل کئے۔ جو نمبر صحیح جواب کے لئے اس کو ملے اور غلط جواب کے لئے اس کا ایک نمبر کم ہو گیا۔ اگر یش کو 4 نمبر صحیح جواب کے لئے ملتے اور غلط جواب کے لئے اس کے 2 نمبر کٹتے تو اس کو کل 50 نمبر ملتے، اس ٹسٹ میں کل کتنے سوال تھے؟

(iv) ایک ہائی وے پر دو مقام A اور B، 100 کلو میٹر کے فاصلہ پر ہیں، ایک ہی وقت میں ایک کار مقام A سے اور

دوسری مقام B سے روانہ ہوتی ہے۔ اگر دونوں کاریں مختلف رفتار سے ایک ہی سمت میں چلتی ہیں تو وہ 5 گھنٹہ میں ملتی ہیں۔ اگر وہ دونوں ایک دوسرے کی طرف آتی ہیں تو 1 گھنٹہ میں ملتی ہیں، دونوں کاروں کی رفتاریں معلوم کیجیے۔

(v) ایک مستطیل کا رقبہ 9 مربع اکائیاں کم ہو جاتا ہے اگر اس کی لمبائی 5 اکائیاں کم اور چوڑائی 3 اکائیاں کم کر دی جائے تو اس کا رقبہ 67 مربع اکائیاں بڑھ جاتا ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

3.5 دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں میں تحلیل ہونے والی مساواتیں

اس سیکشن میں ہم ایسی مساواتوں کے جوڑوں کے حل معلوم کریں گے جو خطی نہیں ہیں لیکن ان کو مناسب ردوبدل کے ساتھ خطی مساواتوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ اس کی تشریح ہم کچھ مثالوں سے کریں گے۔

مثال 17: مساواتوں کے جوڑوں کو حل کیجیے۔

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

حل: آیئے مندرجہ بالا مساواتوں کو ہم لکھتے ہیں۔

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \qquad (2)$$

یہ مساواتیں $ax+by+c=0$ کی شکل میں نہیں ہیں لیکن اگر ہم مساواتوں (1) اور (2) میں $\frac{1}{x}=p$ اور $\frac{1}{y}=q$ رکھ دیں تو ہمیں ملتا ہے،

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

اس طرح سے ہم نے دی ہوئی مساواتوں کو خطی مساواتوں کے جوڑوں میں تبدیل کر دیا ہے۔ اب آپ ان مساواتوں کو حل کرنے کے لئے کوئی سا بھی طریقہ استعمال کر سکتے ہیں اور $p = 2, q = 3$ حاصل کر سکتے ہیں۔

آپ جانتے ہیں کہ $p = \frac{1}{x}$ اور $q = \frac{1}{y}$

p اور q کی قدریں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{x} = 2 \text{ یعنی } x = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{1}{y} = 3 \text{ یعنی، } y = \frac{1}{3}$$

تصدیق: دی ہوئی مساواتوں میں $x = \frac{1}{2}$ اور $y = \frac{1}{3}$ رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں مساواتیں مطمئن ہو جاتی ہیں۔

مثال 18: مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑوں کو خطی مساواتوں کے جوڑوں میں تحلیل کر کے حل کیجیے:

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

حل: آیئے $\frac{1}{x-1} = p$ اور $\frac{1}{y-2} = q$ رکھئے۔ تب دی ہوئی مساواتیں

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \qquad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \qquad (2)$$

لکھی جا سکتی ہے:

$$5p + q = 2 \qquad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \qquad (4)$$

مساواتیں (3) اور (4) عمومی شکل کی خطی مساواتوں کا جوڑا ہیں۔ اب آپ اس کو کسی بھی طریقہ سے حل کر سکتے ہیں

اور $p = \frac{1}{3}$ اب p کی جگہ $\frac{1}{x-1}$ رکھنے پر ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

یعنی، $x - 1 = 3$ یعنی $x = 4$

اسی طرح سے q کی جگہ $\frac{1}{y-2}$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

$3 = y - 2$ یعنی $y = 5$

اس طرح سے $x = 4$ اور $y = 5$ دی ہوئی خطی مساواتوں کے جوڑوں کا مطلوبہ حل ہے۔

تصدیق: $x = 4$ اور $y = 5$ (1) اور (2) میں رکھ کر آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ یہ ان مساواتوں کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

مثال 19: ایک ناؤ بہاؤ کے خلاف 30 کلومیٹر اور بہاؤ کے ساتھ 44 کلومیٹر کل 10 گھنٹے میں جاتی ہے 13 گھنٹوں میں یہ 40 کلومیٹر بہاؤ کے خلاف اور 55 کلومیٹر بہاؤ کے ساتھ جا سکتی ہے۔ ناؤ کی ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار اور پانی کی رفتار معلوم کیجیے

حل: مان لیجئے ناؤ کی ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ اور پانی کی رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ y ہے۔

تب ناؤ کی بہاؤں کے ساتھ رفتار کلومیٹر $(x+y)$

اور وقت = فاصلہ / رفتار

پہلی حالت میں جب ناؤ 30 کلومیٹر بہاؤ کے خلاف جاتی ہے۔ مان لیجیے بہاؤ کے خلاف وہ وقت لیتا ہے t_1 تب

$$t_1 = \frac{30}{x-y}$$

مان لیجیے ناؤ بہاؤ کے ساتھ 44 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں وقت لیتی ہے t_2 تب $t_2 = \frac{44}{x+y}$ کل لیا گیا وقت $t_1 + t_2$، 10 گھنٹے ہے۔ اس لئے ہمیں مساوات ملتی ہے۔

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

دوسری حالت میں 13 گھنٹوں میں یہ 40 کلومیٹر بہاؤ کے خلاف اور 55 کلومیٹر بہاؤ کے ساتھ، ہمیں مساوات ملتی ہے۔

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

(3) رکھئے $\frac{1}{x+y} = v$ اور $\frac{1}{x-y} = v$

ان قدروں کو (1) اور (2) مساواتوں میں رکھنے کے بعد ہمیں مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑے ملتے ہیں۔

$30u + 44v = 10$ یا $30u + 44v - 10 = 0$ (4)

$40u + 55v = 13$ یا $40u + 55v - 13 = 0$ (5)

ترچھی ضرب کے طریقے کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{u}{44(-13) - 55(-10)} = \frac{v}{40(-10) - 30(-13)} = \frac{1}{30(55) - 44(40)}$$

یعنی $\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$

یعنی $u = \frac{1}{5}, \quad v = \frac{1}{11}$

اب u اور v کی ان قدروں کو مساوات (3) میں رکھئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5} \text{ اور } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

یعنی، (6) $x - y = 5$ اور $x + y = 11$

ان مساواتوں کو جمع کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$2x = 16$

یعنی $x = 8$

(6) کی مساواتوں کو گھٹانے پر

$2y = 6$

یعنی $y = 3$

اس طرح سے ناؤ کے ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار ہے 8 کلومیٹر فی گھنٹہ اور پانی کی رفتار ہے 3 کلومیٹر فی گھنٹہ۔

تصدیق: ان حلوں کو مساواتوں میں رکھ کر مطمئن کر سکتے ہیں۔

مشق 3.6

1۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑوں کو خطی مساواتوں کے جوڑوں میں تحلیل کر کے حل کیجیے۔

(i) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$

$\frac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(v) $\frac{7x - 2y}{xy} = 5$

$\frac{8x + 7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2۔ مندرجہ ذیل عبارتی سوالوں کو مساواتوں میں بدلئے اور پھر ان کو حل کیجیے۔

(i) ریتو ایک کشتی کو 2 گھنٹے میں 20 کلومیٹر بہاؤ کے ساتھ چلا سکتی ہے اور 2 گھنٹوں میں 4 کلومیٹر بہاؤ کے خلاف اس کی ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار اور کرنٹ (پانی کا بہاؤ) کی رفتار معلوم کیجیے۔

(ii) 2 عورتیں اور 5 آدمی کشیدہ کاری کے ایک کام کو مل کر 4 دن میں پورا کرتے ہیں جبکہ 3 عورتیں اور 6 آدمی مل کر اسی کام کو 5 دن میں ختم کرتے ہیں معلوم کیجئے ایک اکیلی عورت اس کو کتنے وقت میں پورا کرے گی اور ایک مرد اکیلا اس کام کو کتنے وقت میں پورا کرے گا۔

(iii) روحی اپنے گھر کا 300 کلومیٹر کا سفر جزوی طور سے ٹرین سے اور جزوی طور سے بس سے پورا کرتی ہے۔ وہ 4 گھنٹہ میں سفر پورا کرتی ہے اگر وہ 60 کلومیٹر ٹرین سے اور باقی بس سے سفر کرے اگر وہ 100 کلومیٹر ٹرین سے سفر کرے اور باقی بس سے تو اسے 10 منٹ زیادہ لگتے ہیں، ٹرین اور بس کی رفتاریں الگ الگ معلوم کیجیے۔

مشق 3.7 (اختیاری)*

1۔ دو دوست، اَنی اور بیجو کی عمر میں 3 سالوں کا فرق ہے۔ اَنی کے والد دھرم کی عمر اَنی سے دگنی ہے اور بیجو کی عمر اس کی بہن کیتھی کی دگنی ہے۔ کیتھی اور دھرم کی عمروں میں 30 سال کا فرق ہے۔ اَنی اور بیجو کی عمریں معلوم کیجیے۔

2۔ کوئی اپنے دوست سے کہتا ہے کہ تم مجھے 100 روپے دو تو میں تم سے دوگنا مالدار ہو جاؤں گا۔ دوست جواب دیتا ہے کہ اگر تم مجھے 10 دے دو تو میں تم سے 6 گنا مالدار ہو جاؤں گا۔ بتایئے ان کے پاس کل کتنی رقم تھی (بھاسکر 11 کتاب کی بیجا گنیتا ہے)

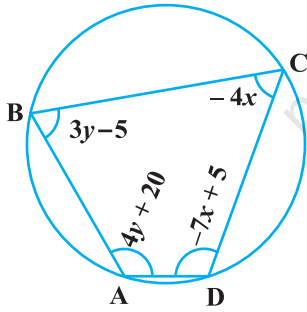
[اشارہ: $x + 100 = 2(y - 100),\ y + 10 = 6(x - 10)$]

3۔ ایک ٹرین کچھ فاصلہ یکساں رفتار سے طے کرتی ہے۔ اگر ٹرین 10 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے تیز چلتی ہے تو شیڈول وقت سے 2 گھنٹے کم لیتی۔ اگر ٹرین 10 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے ہلکی چلتی تو شیڈول وقت سے 3 گھنٹہ زیادہ لیتی۔ ٹرین کے ذریعے طے کیا گیا فاصلہ معلوم کیجیے۔

4۔ ایک کلاس کے طلباء کو قطار میں کھڑا کیا جاتا ہے۔ اگر قطار میں 3 طلباء فالتو ہوں تو قطاروں کی تعداد کم ہو جاتی ہے اور اگر ہر قطار میں 3 طلبا کم ہوں تو دو قطاریں بڑھ جاتی ہیں۔ کلاس میں طلبا کی تعداد معلوم کیجیے۔

5۔ ΔABC میں $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ تینوں کا زاویہ معلوم کیجیے۔

6۔ مساواتوں $5x - y = 5$ اور $3x - y = 3$ کا گراف بنایئے۔ اور ان خطوط اور y محور سے بنے مثلث کے راسوں کے مختصات بھی معلوم کیجیے۔

7۔ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کیجیے۔

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a - b)x + (a + b) = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

شکل 3.7

8۔ ABCD ایک دائری چار ضلعی ہے (شکل 3.7 دیکھیے)

*یہ مشقیں امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں ہیں۔

دائری چار ضلعی کے زاویہ معلوم کیجیے۔

3.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزیں سیکھیں

1۔ ایک ہی قسم کے دو متغیروں کی خطی مساواتوں دو متغیر والی خطی مساواتیں کا جوڑا کہلاتی ہیں۔ خطی مساواتوں کے جوڑے عموی شکل ہے۔

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a2\,x + b_2y + c_2 = 0$$

جہاں $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ حقیقی اعداد ہیں جب کہ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

2۔ دومتغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں کو مندرجہ ذیل طریقوں سے ظاہر اور حل کر سکتے ہیں۔

(i) گراف کا طریقہ (ii) الجبری طریقہ

3۔ مساواتوں کا جوڑا گراف کے ذریعہ دو خطوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(i) اگر خطوط ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں تو وہ نقطہ تقاطع دونوں مساواتوں کا یکتا حل ہوتا ہے اس حالت میں مساواتوں کا جوڑا ہم آہنگ کہلاتا ہے۔

(ii) اگر خطوط منطبق ہوتے ہیں تو حل لامحدود ہوتے ہیں۔ اور خط پر موجود ہر ایک نقطہ دونوں مساواتوں کا حل ہوتا ہے۔ اس حالت میں مساوات تابع (ہم آہنگ) ہوتی ہیں۔

(iii) اگر خطوط متوازی ہوں تو مساواتوں کے جوڑے کا کوئی حل نہیں ہوتا۔ اس حالت میں مساواتیں غیر ہم آہنگ کہلاتی ہیں۔

4۔ الجبری طریقہ: خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کرنے کے لئے ہم نے مندرجہ ذیل طریقوں کو سیکھا۔

(i) بدل (Substitution Method) کا طریقہ

(ii) اخراج (Elimination Method) کا طریقہ

(iii) ترچھی ضرب (Cross-multiplication Method) کا طریقہ

5۔ اگر خطی مساواتوں کا جوڑا $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ کی شکل کا ہو تو مندرجہ ذیل باتیں ممکن ہوتی ہیں:

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$ اس حالت میں خطی مساواتوں کا جوڑا ہم آہنگ ہوتا ہے۔

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ اس حالت میں خطی مساواتوں کا جوڑا غیر ہم آہنگ ہوتا ہے۔

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ اس حالت میں خطی مساواتوں کا جوڑا تابع اور ہم آہنگ ہوتا ہے۔

6۔ ایسی بہت سی صورتِ حال ہوتی ہیں جن کو ریاضیاتی طور پر شروع میں دو خطی مساواتوں میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ لیکن بعد میں ہم ان کو بدل کے طریقہ سے خطی مساواتوں کے جوڑوں میں تحلیل کر لیتے ہیں۔